



Instituto Santa Cecilia

Módulo de orientación: Matemática 6º

Apellido y Nombre:

Matemática: 2º Trimestre

LÍMITES

1) a) Dibujar los gráficos de las siguientes funciones:

i) $f(x) = 3$

iv) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

vii) $f(x) = 2^x$

ii) $f(x) = x + 6$

v) $f(x) = \sqrt{x}$

viii) $f(x) = \log_2 x$

iii) $f(x) = x^2$

vi) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 2 \\ 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

b) Estimar, si existe, en cada caso, el valor de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2) Dibujar, en cada caso, una función que verifique las condiciones indicadas:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5$ $f(1) = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ $f(1) = 5$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ $f(1) = 3$

d) $f(x) = 1$ si $-2 \leq x \leq 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$

e) $f(0) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$

3) Graficar f , en cada uno de los siguientes casos, e indicar el \lim señalado, si es que existe

a) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } 2 < x < 5 \\ x+1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

4) Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x^2 - 6)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x + 2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \left(4 + x - \frac{1}{x} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{3x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x} - 2)x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2x + 6)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} (3x + 2^x)$$

5) En cada caso calcular, si existe, el $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$a) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 3x + 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

6) Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = A$ y $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = B$ ($B \neq 0$), indicar el valor de cada límite:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)}{g(x)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} [2 + f(x) + g(x)]$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot g(x)}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 5}{g(x)}$$

7) Graficar la función y calcular los límites:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

8) Hallar una expresión para $A(x)$ de modo que exista el $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ en la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} A(x) & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

9) Graficar una función que cumpla:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f(2) = 0$$

10) Hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5)^2 =$

c) $\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{x + 13} =$

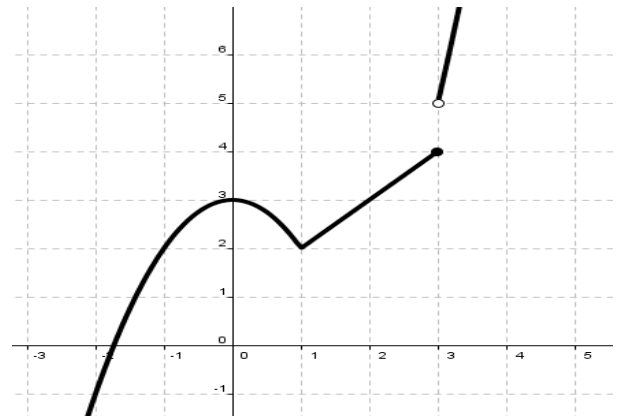
d) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2}}{2x - 10} =$

11) Teniendo en cuenta la siguiente gráfica de $f(x)$, hallar

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) =$$



12) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{2x - 4}$

13) Averiguar los límites cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$

h) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

ñ) $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2}$

b) $f(x) = x^2$

i) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

o) $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{-x^2 + 1}$

c) $f(x) = x^3 - x^2$

j) $f(x) = \frac{1}{x}$

p) $f(x) = 2^x$

d) $f(x) = 3x^3$

k) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

q) $f(x) = \left(3 - \frac{5}{x^2}\right)$

e) $f(x) = -2x^2 + 3$

l) $f(x) = \frac{x+3}{x}$

r) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

f) $f(x) = \sqrt{x+5}$

m) $f(x) = \frac{2x-5}{x}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

n) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x+1}$

14) El aumento producido por la lupa viene dado por la expresión $A(d) = -\frac{5}{d-5}$, donde d es la distancia, en dm, a que se pone el objeto de la lupa.

a) ¿Qué ocurre al disminuir la distancia tanto como se pueda?

b) ¿Qué ocurre al aumentar la distancia?

c) ¿Qué ocurre cuando se pone, exactamente a 5 dm?

15) Calcular el límite cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{(x-3)(x^2+x-2)}{(3-2x)(x^2+5)}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} - \frac{3x^2}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^4}{x^4 - 3x^3}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x-\sqrt{2x}}}$

16) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-5x+4}{x^3-7x^2+12x}$

17) Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-21}{x^2 - 5x + 4} - \frac{7}{x - 1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 8x + 12} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x - 5}{x^2 - 9x + 20}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 7x^3 + 2x^2}{3x^4 + 6x^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{5}{x - 3} + \frac{10}{x^2 - 8x + 15} \right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 - x^3 - x^2 + x}$$

18) Salvar la indeterminada y calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{2 - \sqrt{2x - 2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{x - 4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x - 4}}{x^2 - 7x + 10}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{4x - 3}}{x - 1}$$

19) Calcular los siguientes límites, aplicando la regla del número e:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 2} \right)^{3x + 5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{5x} \right)^{5x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x} \right)^{3x - 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x}}$$

20) Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{\frac{3}{x - 1}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{2}{x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x + 10}{4x + 2} \right)^{\frac{5x}{x - 4}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)^{\frac{x - 1}{x - 3}}$$

21) Esbozar el gráfico de una función $f(x)$, de la que se conocen los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

22) Calcular los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^4 + x^3 - 2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - 2x + 1)$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 5x + 6)$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{(2x^2 - 8x - 3)}$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{x+2}$ f)
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{x+2}$

23) La población de una provincia viene dada, en millones de habitantes, por la función:

$$P(t) = \frac{20(t-1)}{4 + (t+1)^2} + 40 \quad , \text{ donde } t \text{ es el tiempo en años.}$$

Calcular la población máxima de manera aproximada y el límite cuando t tiende a infinito.

24) ¿Para qué valores de a y b $\in \mathbb{R}$ se verifica que:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{ax^2 + bx^4 + 3} = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - 5x - 1}{3 - bx^4 - x} = -2$

25) Gráfica una función que tenga los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \infty$

26) Hallar los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x - \sqrt{x-2}} =$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x^2 - 3x} =$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} =$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}}{x^2 - 3x + 2} =$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{5}{x+4} + \frac{25}{x^2 + 3x - 4} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x-2}{x^3 - 8}}$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{8x} =$